Histoire et épistémologie

2e édition

LA CONSTRUCTION DES NOMBRES

Claude-Paul **Bruter**

ellipses

Chapitre 1

Une activité fondatrice des mathématiques : la représentation

I.1 Le défi majeur

Le célèbre historien britannique Arnold Toynbee (1889-1978) examinait l'histoire des civilisations à travers une succession de défis que les sociétés s'efforçaient de relever. On peut, plus généralement, concevoir toute activité humaine comme une réponse apportée à un défi, provenant de l'intérieur de nous-mêmes, ou de notre environnement. Empruntant la terminologie à la biologie et à l'économie, nous dirons que les défis ont des origines exogènes ou endogènes plus ou moins marquées.

Tout défi possède un effet déstabilisateur potentiel auquel nous réagissons spontanément. Nous sommes ici en présence d'un phénomène général dans le comportement des objets, phénomène lié à l'un des concepts fondamentaux évoqués dans l'introduction : le concept de *stabilité*, sur lequel je n'aurai de cesse de revenir.

Le défi intellectuel principal auquel l'homme est confronté est sans aucun doute celui de la compréhension de l'espace. C'est en effet dans l'espace qu'il se situe et qu'il évolue. La connaissance des propriétés de l'environnement, aussi bien dans le très court terme que dans le futur le plus lointain, est d'une nécessité vitale pour l'être vivant. Cette connaissance lui est indispensable pour assurer sa *stabilité* individuelle et celle de la communauté à laquelle il appartient.

Prenons un exemple : chacun sait aujourd'hui que des collisions de notre planète avec des astéroïdes capables de nous anéantir peuvent se produire, et que, d'ici quatre à cinq milliards d'années, l'évolution physique de l'astre solaire, qui fera de lui un ogre incandescent, le conduira à brûler cette terre qui nous fait vivre. Aussi comprend-on que la conquête de l'espace, sous toutes ses formes, soit l'un des programmes fondamentaux que la vie, et l'homme en particulier, suivent ou ont suivi, souvent de manière inconsciente d'ailleurs.

Pour parvenir à remplir ce programme, nous avons été dotés de capacités de représentation et de symbolisation, nous les avons développées en nous, et en dehors de nous-mêmes par nos créations « artificielles ». Nous les avons mises à profit pour créer les mathématiques, en particulier les disciplines qui s'occupent de manière plus spécifique de l'espace : la topologie, la géométrie.

Avant d'aborder ces sujets, il convient d'abord de nous appesantir un moment sur cette question si importante de notre activité de représentation.

I.2 La représentation : une activité fondamentale de l'être vivant

Chacun a sans doute entendu évoquer le mythe platonicien de la caverne. Platon[1] (428 env.–347 env.), ce merveilleux philosophe, à lire tout entier, qui, dans un langage si simple, si accessible, également si beau, a décrit et analysé tant de choses, introduit, au début du livre VII de sa République, cette allégorie des hommes enchaînés, aux regards rivés sur un écran, le mur d'une caverne ; ils y observent ces images que sont les ombres des objets réels, projetées sur le mur par la lumière d'un feu. Ces hommes ne voient que des représentations. Platon est le premier auteur qui, à ma connaissance, introduit à sa manière cette notion :

> *Et d'abord penses-tu que dans cette situation ils aient vu d'eux-mêmes et de leurs voisins autres choses que les ombres projetées par le feu sur la partie de la caverne qui leur fait face ?* [...] *Il faut assimiler le monde visible au séjour dans la prison* [...]

Par représentation, on entendra ici, sans qu'il y ait de confusion possible entre ces deux sens, soit l'acte de représenter, soit, plus fréquemment, le résultat de cet acte : sont donnés un espace source et un autre espace dit écran ; par des moyens concrets ou abstraits, les objets de l'espace source sont, en totalité ou partiellement, transportés sur l'espace écran ; le transport peut être accompli avec ou sans pertes d'information. Les objets qui apparaissent sur l'espace écran sont des représentations des objets sources. Lorsque, par exemple, l'espace source est celui de notre environnement habituel, et que l'espace écran est notre espace mental, une représentation d'un objet concret est, selon une définition du dictionnaire Quillet, l'« image fournie à l'entendement par les sens ou par la mémoire ».

1. « *Esprit puissant entre tous* » dit de lui Alain dans *Les passions et la Sagesse*, Gallimard, Paris, 1960, p. 215. Voir son commentaire sur l'allégorie de la caverne pp. 876-885.

L'activité de représentation possède un caractère d'universalité. À des degrés divers, à des niveaux de localité parfois très différents, les objets de notre univers sont modifiés par les chocs qui les frappent : ils en gardent ainsi une forme de souvenir. Il arrive que les empreintes, même grossières, permettent de reconstituer en gros traits les dessins du monde extérieur. Elles sont à la fois éléments de mémoire et fragments de représentation.

Mémoire et représentation font partie de l'ordre naturel. Les fonctions correspondantes se sont développées au fur et à mesure que se déployait le monde originel. Ses constructions acquéraient une architecture dont la combinatoire devenait chaque jour plus enchevêtrée, en même temps que la vie les rendait plus mobiles. Leurs possibilités de saisie et de protection augmentaient. S'affirmait, pour la sauvegarde des êtres, la nécessité de disposer de représentations fiables de l'environnement.

De manière de plus en plus consciente, l'homme a consacré une part de plus en plus importante de son activité à l'exercice de la représentation, ainsi qu'au développement d'outils utiles à celle-ci. Beaucoup de mystère plane encore sur les origines et les modalités de l'expansion chez l'animal de ses facultés de représentation. Par l'intermédiaire des sens, les événements peuvent retentir sur le comportement physiologique. Un poil se hérisse, un coup s'allonge, un chant est produit. Ces modifications du comportement, souvent liées par une sorte d'implication à des événements extérieurs, en constituent une forme de représentation, un code, que les congénères sauront interpréter correctement, spontanément, ou après un apprentissage bref. La représentation implique ainsi un lien stable de cause à effet. Dans les règnes physique et biologique, la nature établit d'elle-même ces relations et leurs qualités de stabilité. Chez l'homme, il arrive que, par un arbitraire apparent, la société ou ses mandants fixent par décret ces propriétés : l'abondance des possibilités techniques de représentation et de codage permet de procéder à des choix.

Pour reprendre la terminologie des linguistes, toute représentation admet un *signifiant*, l'objet souvent matériel qui représente, et un *signifié*, l'objet qui est représenté, son contenu sémantique. Les représentations peuvent se succéder en chaîne, avec des degrés inégaux dans la qualité de la représentation. Ainsi la perception du danger immédiat peut déclencher des réactions hormonales, l'émission d'un cri, qui constituent des représentations chimiques et mécano-acoustiques du danger, spontanées chez l'individu. Mais le même individu peut codifier ses premières réactions, et adresser à ses congénères d'autres signaux qu'il aura conçus à partir de connaissances et de moyens techniques mis à sa disposition.

Les risques d'ambiguïté véhiculés par les signifiants seront d'autant plus faibles que la sémantique attachée aux signifiés sera mieux cernée et plus limitée, et que signifiants et signifiés auront des propriétés de stabilité plus accusées. Dans ces cas, les représentations expriment des propriétés intrinsèques dont la valeur est universelle, et dont la permanence au cours des temps est assurée *ipso facto*. Ces qualités caractérisent notamment le système de représentation connu sous le nom de mathématique.

Tous nos sens, médiateurs entre le monde externe et nous-mêmes, concourent à fabriquer des images biologiques et mentales de l'univers qui nous entoure. Nous agissons alors en fonction des résultats d'une étude interne de ces représentations mentales. Que soit mauvaise la qualité de la représentation, par exemple à la suite de troubles physiologiques, psychologiques, et nous voilà induits dans l'erreur, parfois fatale. L'activité de représentation se révèle ainsi essentielle pour la conduite de l'être vivant.

Les êtres vivants dits supérieurs, et l'homme plus que tout autre, extériorisent en partie leurs représentations mentales, d'abord à travers des mouvements spontanés de certaines parties du corps, comme par exemple le repliement sur soi. Ces mouvements sont l'expression d'une première réponse aux agressions dont ces êtres vivants peuvent être l'objet. L'évolution de ces êtres a entre autres été marquée par un développement des capacités d'expression. Elles ont débouché sur la phonation et sur des aptitudes nouvelles à la préhension et à la manipulation des objets, et, par suite, sur des capacités nouvelles et contrôlées, à extérioriser les représentations mentales sous la forme de réalisations physiques, comme les peintures et les objets images, façonnés par la main dans des matières de malléabilité fort diverse.

Ces représentations extérieures, souvent appelées *modèles*[1], ont joué un double rôle important dans les progrès de l'humanité, en tant que substituts de la mémoire, et instruments de la découverte. Alors que les représentations mentales ou internes ont un caractère souvent rapidement évanescent, les représentations extérieures, réalisées dans des matériaux *ad hoc*, ont un caractère davantage pérenne et possèdent l'avantage de la reproductibilité. Ils suppléent par conséquent aux défaillances de la mémoire, restent observables et objets d'analyse, de réflexion, voire d'expérimentation, bien au-delà du moment qui les a vus naître. Ils acquièrent le statut d'instruments de la connaissance

1. Sur les propriétés générales des modèles cf. C. P. Bruter *Les Architectures du Feu, Considérations sur les modèles dans les Sciences,* Paris, Flammarion, 1982.

et du savoir. C'est le cas bien sûr des représentations symboliques et abstraites qui peuplent les différents étages de l'immeuble $\mathcal{M}$ des mathématiques, toujours en construction, en évolution.

Les représentations fondatrices sont celles de la Forme, de la Diversité à travers le Nombre, et du Mouvement.

Parmi ces représentations, méritent une place à part, celles, singulières, qui sont qualifiées d'œuvres d'art. Un tel titre peut être attribué à une représentation remarquable par le soin apporté à sa réalisation, par ses caractères de fidélité à l'objet source et qui peuvent en déterminer la valeur d'usage, par ses qualités esthétiques. Au-delà des représentations réalistes immédiates, comme les peintures et les sculptures, les représentations symboliques, textes littéraires utilisant des symboles phonétiques, textes scientifiques employant également des symboles numériques et logiques, peuvent toutes avoir accès à ce statut le plus élevé dans la qualité de la représentation. Romanciers, poètes ou mathématiciens, tous accomplissent un travail de nature foncièrement artistique.

La pratique de la mathématique est de nature artisanale, exigeant labeur et soin ; elle vise à la perfection dans la construction comme dans l'exposition. L'œuvre de Nicolas Bourbaki est, de ce point de vue, exemplaire, tout comme, à propos de la théorie des nombres qui nous intéresse ici, celle de Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Les artistes, parmi lesquels le fameux architecte Palladio (1508-1580), qui ont conçu les riches et inattendus plafonds du palais des Doges à Venise, les font admirer dans leur splendeur travaillée et dorée. Gauss a fait un travail non moins étonnant en établissant dans ses *Disquisitiones Arithmeticae*, dans ses Recherches Arithmétiques [49], publiées en 1801 et en latin alors qu'il n'avait que 24 ans, une théorie de propositions sur les propriétés de divisibilité des entiers et sur la résolution des équations. Cette théorie est couronnée de théorèmes importants et d'applications majeures, comme celle sur la possibilité de diviser un cercle en p parties égales, à l'aide de la règle et du compas seulement. Une telle opération de découpe régulière du cercle porte le nom de *cyclotomie*. Cette division est possible si et seulement si p est de la forme $p = 2^m F_1 F_2 \dots F_k$, où F_i (i est l'un des entiers 1, 2, ..., k) est un *nombre premier*, seulement divisible donc par 1 et par lui-même, de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Un tel nombre est appelé un nombre de Fermat (1601-1665) dont seuls les 5 premiers sont connus, pour lesquels n est respectivement égal à 0, 1, 2, 3, 4. Gauss nous fait voir, par les démonstrations qu'il donne et leurs enchaînements, c'est-à-dire par la monstration des articulations sans faille, fines et subtiles des causes numériques et logiques, un agencement remarquable d'énoncés brillants et finement ciselés.

Nous n'allons pas ici étudier la manière dont on peut diviser un cercle en F = 17 (n = 2) parties égales, mais plutôt nous interroger un moment sur la signification du nombre.

I.3 Le nombre en tant que représentation

Les mathématiciens sont d'abord des hommes, et on ne s'étonnera pas que quelques-uns d'entre eux aiment beaucoup les chats. C'est le cas par exemple d'un géomètre éminent, W. (Bill) T. Tutte (1911-), et de John Hubbard qui a beaucoup travaillé en collaboration avec Adrien Douady sur les systèmes dynamiques gouvernés par des relations de récurrence à variables complexes. John Hubbard annonça un jour que les chats savent au moins compter jusqu'à deux. La preuve de cette affirmation n'a rien de mathématique ; elle est peut-être même le résultat d'une expérimentation sujette à caution[1]. Quoi qu'il en soit, personne n'émit d'objection sérieuse à cette assertion. Que l'homme sache compter depuis longtemps, personne n'en doute. Pour parvenir à assurer sa stabilité spatio-temporelle, n'a-t-il pas dû apprendre à évaluer la composition de sa famille et de sa tribu, l'étendue de ses moyens de subsistance, la diversité de ses ennemis, et enfin la durée ? Il est évident que la nécessité de régir des groupements humains de plus en plus importants a forcé le développement de la numération et de l'arithmétique. L'examen de la représentation scripturale des nombres au cours des siècles, qu'on peut suivre par exemple dans l'ouvrage de Georges Ifrah sur l'*Histoire universelle des chiffres* [61], fournit l'un des meilleurs appuis à cette évidence.

Il est clair que la prise de conscience de la pluralité, sa conception précise, n'ont été élaborées que très lentement au cours des âges. Il faut du courage en effet pour affronter l'innombrable. Au fur et à mesure qu'il s'amplifie, il ressemble à ce brouillard enveloppant, au sein duquel se fondent les directions spatiales : les sens et l'esprit perdent tout repère, s'agitent affolés, avant de sombrer dans un chaos qui précède une mort. Paul Valéry (1872-1945), célèbre poète et philosophe d'avant la dernière guerre mondiale, rapporte dans ses Cahiers [89] l'anecdote suivante :

1. Pour autant qu'il m'en souvienne, l'expérience, difficile, était la suivante. La chatte ayant mis bas, l'expérimentateur supprima de sa vue un premier chaton ; la chatte ne s'en émut point. Procédant par récurrence, un second chaton fut ôté de la vue de la chatte avec le même résultat, etc. En fin d'expérience, la chatte se mit à miauler tristement lorsqu'on supprima de sa vue l'un des deux chatons qui lui restaient. On sait aujourd'hui que nombre d'animaux « savent » dénombrer au-delà de deux.

> *Vu Estaunié. Me dit que, enfant, à 6 ans, il avait appris à compter jusqu'à 6 – en deux jours. Il comprit alors qu'il y avait 7, etc., et il prit peur qu'il fallût apprendre une infinité de noms. Cet infini l'épouvanta au point de refuser de continuer à apprendre les autres nombres.*

Les premiers hommes à vrai dire n'avaient sans doute pas besoin de connaître des grands nombres. L'élaboration de ceux-ci et leur symbolisation ont pour origine l'observation des astres, l'évaluation de la durée, et surtout la vie en société. Il n'est que de consulter les tablettes et calculi sumériens, les hiéroglyphes égyptiens pour s'en assurer. Une tablette sumérienne des années –2650 environ raconte qu'un grenier à orge totalisant 1 152 000 « silà » d'orge (le silà est une mesure de volume) a été réparti, à raison de 7 silà par personne ; 164 571 personnes ont reçu leur part, et il est resté 7 silà d'orge. On a d'abord créé toute une famille de symboles pour représenter les nombres élevés, et ce n'est que par la suite, que l'on a compris comment ils étaient établis et organisés, et comment ils pouvaient être décrits uniformément à partir d'un nombre particulier choisi comme base de la numération. Même si la vision globale et confuse de l'ensemble des entiers naturels peut s'acquérir rapidement, elle est loin d'être innée, contrairement à celle des tout premiers nombres. Elle résulte d'un apprentissage qui, en ses débuts, opère en procédant par adjonction d'unités.

Ce n'est qu'au siècle dernier que l'on s'est vraiment posé la question de la nature du nombre, lorsque la mathématique devint assez mûre pour que les mathématiciens songent à fonder l'arithmétique sur une base axiomatique. Certes, Platon était un trop grand épistémologue pour ne pas, au moins, effleurer la question. Comme le fera également son jeune élève Aristote (384-322), Platon, dans le Théétète, dans le Timée, dans le Parménide, a relié le nombre au temps, car l'apparition d'un objet nouveau, qui augmente le nombre, s'accomplit dans le mouvement et la durée. Il évoque par exemple dans le Timée les « *formes du temps qui imite l'éternité et progresse en cercle suivant le nombre* ». Plus formellement, Platon, Aristote et Euclide (IVe siècle)[1] ont vu dans le nombre « *une multitude composée d'unités* » [43]. Cette définition d'Euclide perdurera jusqu'au siècle dernier.

Je ne décrirai pas ici en détail l'évolution des pensées, des concepts, des données qui ont conduit quatre mathématiciens, parmi d'autres, à entreprendre des travaux sur la définition formelle des entiers naturels. Ces mathématiciens sont Hermann Grassmann

---

1. On manque d'informations sur la vie d'Euclide : on sait seulement qu'il a vécu avant Archimède, né vers l'an – 287 mais après certains disciples de Platon, et qu'il enseigna à Alexandrie.

(1807-1877), Richard Dedekind (1831-1916), Gottlieb Frege (1848-1925) et Giuseppe Peano (1858-1932). J'évoquerai très brièvement quelques points de leur philosophie et de leurs démarches mathématiques dans des paragraphes suivants. On peut dire ici, simplement, que, dans leur esprit, l'ensemble des entiers est devenu un donné naturel, un a priori.

P. Valéry, qui s'intéressait aux développements de la science, écrit en 1922, dans ses Cahiers :

> *Poincaré doutait que l'on puisse définir le nombre. Painlevé, à qui j'ai parlé (très brièvement) de cette question, me semble partager cet avis. Je pense le contraire. Ces messieurs doivent confondre nombre et pluralité. Je vois un tas de pierres. Je ne sais combien elles sont. Je fais le compte et j'ai un nombre. Décrire ce que j'ai fait est la* définition du nombre.

C'est un peu de cette manière, qu'influencé sans doute par la théorie platonicienne des impressions, je conçois en partie le nombre.

Dans cette conception première, le *nombre* est compris comme l'expression d'une *représentation spatiale d'objets dans notre environnement*. Cette représentation est primaire ; le milieu constitue un fond indifférencié sur lequel se détachent des formes dont on ne fait pas l'analyse détaillée. Ce sont, dans un premier temps, de manière immédiate, celles d'objets aperçus et ressentis comme hostiles ou bénéfiques à notre égard. On ne s'intéresse alors aucunement ni à leurs propriétés spécifiques, couleur ou dimension par exemple, ni à leur nature, ni à leur disposition au sein du milieu. *Seules importent leur présence et donc leur existence*, et le nombre suffit à en porter le témoignage. Lorsque je dis quatre, je fais figurer dans l'esprit une potentialité d'existence et de présence de quatre objets, quelconques, obscurs. Ce point de vue est assez proche de celui du philosophe Henri Bergson (1859-1941), exposé au second chapitre de son *Essai sur les données immédiates de la conscience* [7] :

> *Il faut donc bien que, dès l'origine, nous nous soyons représenté le nombre par une juxtaposition dans l'espace.*

Le nombre, qualifié de naturel, est donc un modèle très pauvre de la réalité, sans doute le plus pauvre que l'on puisse concevoir, ce qui lui confère, en contrepartie[1], une sorte de don d'ubiquité et des qualités formelles qui rendent possibles des généralisations et des applications qui paraissent sans limites. Cette façon de voir les nombres comme

---

1. On pense naturellement à doter les modèles d'une loi de type Mariotte ou du type relation d'incertitude : le produit de la richesse d'un modèle par sa valeur de généralité serait constant en toute première approximation.